

# MENENTUKAN POTENSIAL PADA TITIK PENAMPANG KONDUKTOR BEARBENTUK BUJUR SANGKAR DENGAN PERSAMAAN LAPLACE DAN SECARA NUMERIK

*Cekmas Cekdin<sup>1</sup>, Faisal Damsi<sup>2</sup>*

*\* Staf Dosen Jurusan Teknik Elektro Universitas Muhammadiyah Palembang*

*\*\* Staf Dosen Program Studi Elektronika Jurusan Teknik Elektro Politeknik Negeri Sriwijaya Palembang*

## ABSTRAK

Permasalahan dalam mendapatkan medan potensial pada penampang konduktor berbentuk bujur sangkar dimana dalam literatur yang digunakan banyak metode yang digunakan matematisnya rumit yang menyita waktu yang lama dalam analisisnya. Untuk itulah melalui paper penulis memaparkan untuk mendapatkan medan potensial pada titik-titik berbentuk bujur dengan menggunakan metode penyelesaian persamaan Laplace dan secara numerik. Karena dua metode ini masih dikategorikan masih cukup sederhana.

Penyelesaian persamaan Laplace yang dilakukan untuk mendapatkan medan potensial pada penampang konduktor berbentuk bujur sangkar dilakukan secara manual, sedangkan secara numerik adalah dengan bantuan komputer digital yang berbasis bahasa pemrograman *MATLAB*. Hasil yang didapat dari kedua metode tidak jauh berbeda.

**Kata kunci : Potensial listrik, penampang konduktor, persamaan Laplace, numerik.**

## ABSTRACT

Problems in getting the potential field on the conductor cross-section of a square where in the literature that used a lot of complicated mathematical methods are used that take a long time in analysis. For that through the paper the author describes for getting potential field at points in the form of longitude by using the settlement method and the Laplace equation numerically. Because of these two methods is still considered still quite simple.

Completion of the Laplace equation is done to obtain the potential field on the conductor cross-section of a square is done manually, while numerically is with the help of a digital computer-based *MATLAB* programming language. The results of both methods are not much different.

**Keywords: Electric potential, conductor cross-section, the Laplace equation, numerically.**

## 1. PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Potensial listrik merupakan pintu gerbang untuk setiap informasi yang diinginkan tentang medan elektrostatik pada setiap titik. Intensitas medan listrik dapat dicari dari potensial dengan operasi gradien yang mengandung diferensial, dan intensitas medan listrik dapat dipakai mencari kerapatan fluks listrik.

Pada beberapa konduktor atau perbatasan konduktor untuk menentukan potensial setiap titik dalam pemecahannya melalui analisa atau perhitungan dalam paper ini ada dua cara, yaitu dengan penyelesaian persamaan Laplace dan secara numerik. Dan untuk menentukan harga eksak atau pasti adalah dengan eksperimental. Menentukan medan potensial dengan penyelesaian persamaan Laplace yang merupakan menentukan titik potensial yang berubah terhadap lebih dari satu koordinat.

Dalam paper ini diambil adalah koordinat kartesian, walaupun dapat berlaku juga untuk sistem koordinat lainnya. Sedangkan menentukan medan potensial secara numerik adalah metode yang potensialnya diketahui pada perbatasan suatu daerah, terutama persoalan yang potensialnya tidak berubah dalam suatu arah tertentu, yang distribusi potensial berdimensi dua. Metode ini penyelesaiannya adalah dengan bantuan komputer digital.

### 1.2. Permasalahan

Intensitas medan listrik dalam suatu medan listrik adalah dapat ditentukan lebih dahulu dari potensial listrik. Intensitas medan listrik ini dapat dipakai untuk mencari kerapatan fluks listrik dengan mengalikannya dengan permitivitas. Dalam mendapatkan potensial listrik tidak bisa diperoleh melalui konfigurasi muatan, karena belum ada literatur yang menceritakan bagaimana muatan tersebut tersebar. Banyak dalam literatur untuk

mendapatkan potensial medan listrik secara analisis, akan tetapi permasalahannya dalam metode yang digunakan matematisnya rumit yang menyita waktu yang lama dalam analisisnya. Untuk itulah dalam paper ini penulis memaparkan untuk menentukan medan potensial pada titik-titik berbentuk bujur dengan menggunakan metode penyelesaian persamaan Laplace dan secara numerik. Karena metode ini dapat dikategorikan masih cukup sederhana.

**1.3. Tujuan dan Manfaat**

Penulisan ini bertujuan untuk mendapatkan potensial listrik pada titik-titik konduktor berbentuk bujur sangkar secara analisis, yaitu dengan penyelesaian persamaan Laplace dan secara numerik. Manfaatnya adalah untuk memperkenalkan dalam menentukan medan potensial pada titik-titik konduktor selain berbentuk bujur sangkar, yaitu dengan modifikasi bentuk konduktor tersebut, sehingga akan didapatkan penyelesaiannya.

**1.4. Metode Pembahasan**

Metode pembahasan yang dilakukan adalah menghitung potensial pada titik-titik bujur sangkar penyelesaian persamaan Laplace dengan manual, dan untuk secara numerik adalah dengan bantuan komputer digital yang berbasis bahasa pemrograman *MATLAB*.

**2. TINJAUAN PUSTAKA**

**2.1. Menentukan Potensial Pada Penampang Konduktor**

**Berbentuk Bujur Sangkar Dengan Persamaan Laplace**

(Bo Thide, [1] : 2004., Hayt, William H, Jr, [3] : 1982., Ida, Nathan., Bastos, Joao P. A, [4] : 1997)

Bila persamaan Laplace yang berupa potensial dalam koordinat kartesian berubah dalam lebih dari satu arah, akan mengandung lebih dari satu suku. Misalkan potensial *V* adalah fungsi dari *x* dan *y*, dan mempunyai bentuk khusus yaitu  $V = X(x)Y(y)$ . Dapat disajikan seperti berikut

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

(1)  
atau

$$\frac{\partial^2 (XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (XY)}{\partial y^2} = 0$$

(2)  
atau

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

(3)

Karena *X* tidak mengandung *y* dan *Y* tidak mengandung *x*, maka turunan biasa dipakai, menjadi

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

(4)  
atau

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

(5)  
atau

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

(6)

Bila masing-masing suku harus merupakan tetapan, misalkan tetapan tersebut adalah  $k^2$ , maka

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2$$

(7)

$$- \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2$$

(8)

Persamaan (7) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = X k^2$$

(9)

Penyelesaian Persamaan (9), dengan menganggap *X* sebagai deret seperti berikut

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(10)

dan substitusikan Persamaan (10) ke Persamaan (9) menjadi,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \sum_0^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = k^2 \sum_0^{\infty} a_n x^n$$

(11)

Kedua deret yang berhingga tersebut harus sama untuk setiap harga *x*, berarti juga keduanya harus identik, dan koefisien *x* berpangkat sama dapat disamakan suku demi suku, jadi

$$2 \times 1 \times a_2 = k^2 a_0$$

$$3 \times 2 \times a_3 = k^2 a_0$$

dan umumnya dapat hubungan

$$(n + 2)(n + 1) a_{n+2} = k^2 a_n$$

Koefisien genapnya dapat dinyatakan dengan  $a_0$  sebagai berikut

$$a_2 = \frac{k^2}{1 \times 2} a_0$$

$$a_4 = \frac{k^2}{3 \times 4} a_2 = \frac{k^2}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{k^2}{6!} a_0$$

dan dalam bentuk umum  $n$  genap adalah

$$a_n = \frac{k^n}{n!} a_0$$

Untuk  $n$  ganjil didapat

$$a_3 = \frac{k^2}{2 \times 3} a_1 = \frac{k^3}{3!} a_1$$

$$a_5 = \frac{k^5}{3!} a_1$$

dan dalam bentuk umum  $n$  ganjil adalah

$$a_n = \frac{k^n}{n!} a_1$$

Dengan mensubstitusikannya kembali ke dalam deret pangkat semula, maka didapat

$$X = a_0 \sum_{0, \text{genap}} \frac{k^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{k} \sum_{1, \text{ganjil}} \frac{k^n}{n!} x^n \tag{12}$$

atau

$$X = a_0 \sum_{0, \text{genap}} \frac{(k x)^n}{n!} + \frac{a_1}{k} \sum_{1, \text{ganjil}} \frac{(k x)^n}{n!} \tag{13}$$

deret pertama dari Persamaan (13) dapat ditulis sebagai cosinus hiperbolik seperti berikut

$$\sum_{0, \text{genap}} \frac{(k x)^n}{n!} = \cosh k x = 1 + \frac{(k x)^2}{2!} + \frac{(k x)^4}{4!} + \dots$$

dan deret kedua sebagai sinus hiperbolik seperti berikut

$$\sum_{0, \text{ganjil}} \frac{(k x)^n}{n!} = \sinh k x = k x + \frac{(k x)^3}{3!} + \frac{(k x)^5}{5!} + \dots$$

Sehingga Persamaan (13) menjadi

$$X = a_0 \cosh k x + \frac{a_1}{k} \sinh k x$$

(14)  
atau

$$X = A \cosh k x + B \sinh k x$$

(15)

Untuk  $Y$  dengan cara yang sama dapat menghasilkan dua deret pangkat yang dapat dinyatakan dengan sinus dan cosinus, dan didapatkan

$$Y = C \cos k y + D \sin k y$$

(16)

Dari hasil tersebut potensialnya dapat ditulis

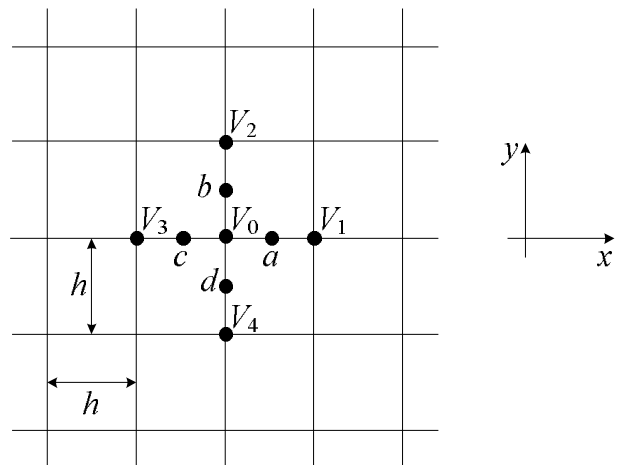
$$V = X Y = (A \cosh k x + B \sinh k x)(C \cos k y + D \sin k y) \tag{17}$$

### 2.2. Menentukan Potensial Pada Penampang Konduktor

Berbentuk Bujur Sangkar Secara Numerik

(Cekdin, Cekmas, [2] : 2005., Kraus, John D, [5] : 1992., Narayana Rao, Nannapaneni, [6] : 2001)

Pandang pada perbatasan suatu daerah yang potensialnya tidak berubah dalam suatu arah tertentu, yaitu distribusi potensial berdimensi dua seperti pada Gambar 1 dibawah ini



Gambar 1. Bagian suatu daerah berisi medan potensial dua dimensi yang dibagi-bagi menjadi beberapa bujur sangkar bersisi  $h$ .

Pada Gambar 1 diatas potensialnya tidak berubah terhadap koordinat  $z$  dan membagi bagian dari penampangnya, dimana potensialnya ingin diketahui dengan menjadikan bujur sangkar yang bersisi  $h$ . Harga yang tak diketahui pada lima titik yang berdekatan ditunjukkan sebagai  $V_0, V_1, V_2, V_3$  dan  $V_4$ . Jika daerahnya bermuatan bebas dan berisi dielektrik serba sama, maka

$$\nabla \cdot D = 0 \tag{18}$$

dan

$$\nabla \cdot E = 0 \tag{19}$$

sehingga untuk dua dimensi kita dapatkan

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \tag{20}$$

dimana operasi gradien menghasilkan

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{21}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{22}$$

Persamaan (20) menjadi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{23}$$

Harga aproksimasi untuk differensial parsial pada Persamaan (23) dapat diperoleh dari potensial yang diketahui, jadi

- Untuk sumbu  $x$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a = \frac{V_1 - V_0}{h} \tag{24}$$

dan

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c = \frac{V_0 - V_3}{h} \tag{25}$$

dari Persamaan (24) dan (25) didapatkan

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 = \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c}{h} = \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2} \tag{26}$$

- Untuk sumbu  $y$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_b = \frac{V_2 - V_0}{h} \tag{27}$$

dan

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_d = \frac{V_0 - V_4}{h} \tag{28}$$

dari Persamaan (27) dan (28) didapatkan

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_0 = \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_b - \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_d}{h} = \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2} \tag{29}$$

sehingga Persamaan (23) didapatkan dari Persamaan (26) dan (29) menjadi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0)}{h^2} = 0 \tag{30}$$

atau

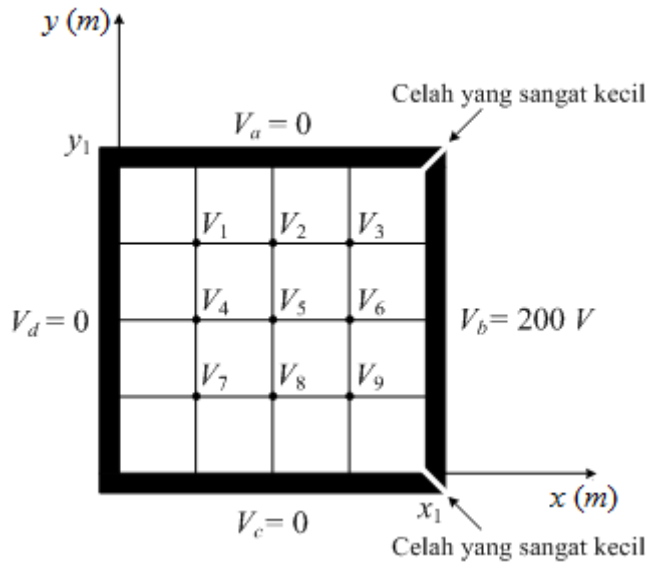
$$V_0 = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4) \tag{31}$$

Persamaan (31) adalah untuk menentukan potensial pada tiap titik sudut bujur sangkar secara iterasi, kondisi ini berhenti bila  $|v_{sekarang} - v_{sebelumnya}| < \epsilon$ , dengan  $\epsilon$  adalah epsilon yang harganya ditentukan.

### 3. MOTODELOGI

#### 3.1. APLIKASI PERHITUNGAN

Daerah bujur sangkar yang dibatasi oleh konduktor dengan dua dimensi  $x$  dan  $y$  seperti Gambar 2. Potensial sisi samping kiri, atas, bawah adalah 0, dan potensial sisi kanan adalah 200 V. Jika bujur sangkar tersebut dibagi menjadi 16 bujur sangkar yang kecil. Akan menentukan potensial pada titik-titik bujur sangkar tersebut.



Gambar 2. Penampang konduktor bujur sangkar dengan potensial sisi kanan adalah 200 V, sisi atas, kiri dan bawah adalah 0 Volt.

Penampang dibagi menjadi 16 bujur sangkar kecil.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

• Dengan Persamaan Laplace

Potensial tersebut adalah fungsi  $x$  dan  $y$  dengan persamaan

$$V = (A \cosh kx + B \sinh kx)(C \cos ky + D \sin ky)$$

Persyaratan  $V = 0$  di  $x = 0$  dan  $y = 0$ , menghendaki konstanta-konstanta  $A$  dan  $C$  tersebut berharga nol. Kemudian  $V = 0$  pada  $y = y_1$ ,  $k = n\pi/y_1$ , dengan  $n$  bulat. Dengan menggantikan  $B$  dan  $D$  dengan  $K$ , menjadi

$$V = K \sinh \frac{n\pi x}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1}$$

Persamaan lebih umum dengan superposisi adalah

$$V = \sum_n K_n \sinh \frac{n\pi x}{y_1} \sin \frac{n\pi y}{y_1}$$

Syarat batas menghendaki

$$V = \sum_n K_n \sinh \left( \frac{n\pi x}{y_1} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{y_1} \right), \quad 0 < x < 1$$

Jadi konstanta-konstanta  $b_n \equiv K_n \sinh(n\pi x_1)$  ditentukan sebagai koefisien-koefisien dalam deret Fourier berbentuk  $f(x) = V_b$  dalam daerah  $0 < x < 1$ .

1. Persamaan koefisien Fourier adalah

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{y_1} \int_0^{y_1} f(x) \sin \left( \frac{n\pi y}{y_1} \right) dy \\ &= \frac{2V_b}{y_1} \int_0^{y_1} \sin \left( \frac{n\pi y}{y_1} \right) dy \\ &= \frac{2V_b}{y_1} \left[ -\frac{y_1}{n\pi} \cos \left( \frac{n\pi x}{y_1} \right) \right]_0^{y_1} \\ &= -\frac{2V_b}{n\pi} \left[ \cos \left( \frac{n\pi x}{y_1} \right) \right]_0^{y_1} \\ &= -\frac{2V_b}{n\pi} \left( \cos \left( \frac{n\pi y_1}{y_1} \right) - \cos 0 \right) \\ &= -\frac{2V_b}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \end{aligned}$$

Jadi

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 4V_b/n\pi & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Sehingga

$$\frac{4V_b}{n\pi} = K_n \sinh(n\pi x_1)$$

$$K_n = \frac{4V_b}{n\pi \sinh(n\pi x_1)}$$

Persamaan potensial didapat

$$V = \sum_n \frac{4V_b}{n\pi} \frac{\sinh \left( \frac{n\pi x}{y_1} \right)}{\sinh(n\pi x_1)} \sin \left( \frac{n\pi y}{y_1} \right)$$

dengan  $x_1 = y_1 = 1$ , menjadi

$$V = \sum_n \frac{4V_b}{n\pi} \frac{\sinh(n\pi x)}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi y)$$

dengan  $V_b = 200$  V, maka

$$V = \frac{800}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \frac{\sinh(n\pi x)}{\sinh(n\pi)} \sin(n\pi y)$$

Sehingga potensial pada titik-titik bujur sangkar untuk :

- $V_1$  pada  $x = 0,25$  dan  $y = 0,75$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_1 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,25 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,75 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,25 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,75 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,25 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,75 \times 5 \times 180^\circ) \right\} = \frac{800}{\pi} (0,075 - 0,00028 + 0,0000015) = \frac{800}{\pi} (0,053 + 0,0001995 - 0,000001) = 13,55 V$$

- $V_2$  pada  $x = 0,50$  dan  $y = 0,75$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_2 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,50 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,75 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,50 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,75 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,50 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,75 \times 5 \times 180^\circ) \right\} = \frac{800}{\pi} (0,14 + 0,0021 - 0,000055) = 37,88 V$$

- $V_3$  pada  $x = 0,75$  dan  $y = 0,75$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_3 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,75 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,75 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,75 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,75 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,75 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,75 \times 5 \times 180^\circ) \right\} = \frac{800}{\pi} (0,32 + 0,022 - 0,0028) = 86,42 V$$

- $V_4$  pada  $x = 0,25$  dan  $y = 0,50$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_4 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,25 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,50 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,25 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,50 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,25 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,50 \times 5 \times 180^\circ) \right\}$$

- $V_5$  pada  $x = 0,50$  dan  $y = 0,50$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_5 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,50 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,50 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,50 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,50 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,50 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,50 \times 5 \times 180^\circ) \right\} = \frac{800}{\pi} (0,199 - 0,003 + 0,000078) = 50 V$$

- $V_6$  pada  $x = 0,75$  dan  $y = 0,50$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_6 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,75 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,50 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,75 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,50 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,75 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,50 \times 5 \times 180^\circ) \right\} = \frac{800}{\pi} (0,45 - 0,032 + 0,00395) = 107,5 V$$

- $V_7$  pada  $x = 0,25$  dan  $y = 0,25$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_7 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,25 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,25 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,25 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,25 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,25 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,25 \times 5 \times 180^\circ) \right\}$$

$$= \frac{800}{\pi} (0,053 + 0,0001995 - 0,000001)$$

$$= 13,55 V$$

- $V_8$  pada  $x = 0,50$  dan  $y = 0,25$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_8 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,50 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,25 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,50 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,25 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,50 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,25 \times 5 \times 180^\circ) \right\}$$

$$= \frac{800}{\pi} (0,14 + 0,0021 - 0,000055)$$

$$= 37,88 V$$

- $V_9$  pada  $x = 0,75$  dan  $y = 0,25$  dengan  $n = 1, 3, 5$  adalah

$$V_9 = \frac{800}{\pi} \left\{ \frac{1 \sinh(0,75 \times 3,14)}{1 \sinh(3,14)} \sin(0,25 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,75 \times 3 \times 3,14)}{3 \sinh(3 \times 3,14)} \sin(0,25 \times 3 \times 180^\circ) + \frac{1 \sinh(0,75 \times 5 \times 3,14)}{5 \sinh(5 \times 3,14)} \sin(0,25 \times 5 \times 180^\circ) \right\}$$

$$= \frac{800}{\pi} (0,32 + 0,022 - 0,0028)$$

$$= 86,42 V$$

Dari hasil perhitungan diatas dapat dibuat tabel seperti Tabel 1.

Tabel 1. Hasil perhitungan dengan persamaan Laplace

POTENSIAL PADA TITIK-TITIK
----------------------------

PENAMPANG KONDUKTOR BERBENTUK BUJUR SANGKAR								
$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$	$V_7$	$V_8$	$V_9$
Dalam Satuan Volt								
13,5	37,8	86,4	19,9	50	107,5	13,55	37,88	86,42

• Secara Numerik

Untuk menentukan potensial pada titik-titik seperti Gambar 2 pertama-tama perkiraan awal dahulu potensial pada titik tengah  $V_5$  dengan menggunakan Persamaan (31), dimana  $V_5 = \frac{1}{4} (200 + 0 + 0 + 0) = 50 V$ . Pada celah yang sangat kecil perkiraan rata-rata dari 0 dan 200 V adalah 100 V. Potensial yang sama  $V_3 = V_9$ ;  $V_2 = V_8$ ;  $V_1 = V_7$ . Besarnya potensial pada  $V_3$  dan  $V_9$  adalah dengan mengambil rata-rata pada keempat titik sudut sepasang sumbu diagonal. Jadi untuk  $V_3 = V_9 = \frac{1}{4} (100 + 200 + 50 + 0) = 87,5 V$  dan untuk  $V_1 = V_7 = \frac{1}{4} (0 + 50 + 0 + 0) = 12,5 V$ . Untuk  $V_2, V_4, V_6$  dan  $V_8$  adalah dengan menggunakan Persamaan (7-14) yang memberikan hasil  $V_2 = V_8 = \frac{1}{4} (87,5 + 0 + 12,5 + 50) = 37,5 V$ ,  $V_4 = \frac{1}{4} (50 + 12,5 + 0 + 12,5) = 18,75 V$  dan  $V_6 = \frac{1}{4} (200 + 87,5 + 50 + 87,5) = 106,25 V$ .

Sehingga untuk menentukan potensial sebenarnya setiap titik bujur sangkar selanjutnya dapat dihitung secara iterasi dengan menggunakan Persamaan (31), dan dapat disusun melalui program bahasa *MATLAB* seperti pada *LAMPIRAN*. Dari program tersebut bila di *run* maka hasilnya seperti berikut

```

=====
!          POTENSIAL PADA TITIK-TITIK PENAMPANG KONDUKTOR BERBENTUK BUJUR SANGKAR          !
!          CERMAS CEKIDIN DAN FAISAL DAMSI          !
!=====
! Iterasi ! V1 ! V2 ! V3 ! V4 ! V5 ! V6 ! V7 ! V8 ! V9 !
! ke :    !
!          !
!          !          Dalam Satuan Volt          !
!=====
! 1 ! 14.06 ! 37.89 ! 86.04 ! 19.14 ! 50.20 ! 105.93 ! 14.16 ! 37.96 ! 85.97 !
! 2 ! 14.26 ! 37.62 ! 85.89 ! 19.65 ! 50.29 ! 105.54 ! 14.40 ! 37.67 ! 85.80 !
! 3 ! 14.32 ! 37.63 ! 85.79 ! 19.75 ! 50.15 ! 105.43 ! 14.36 ! 37.58 ! 85.75 !
! 4 ! 14.34 ! 37.57 ! 85.75 ! 19.71 ! 50.07 ! 105.39 ! 14.32 ! 37.54 ! 85.73 !
! 5 ! 14.32 ! 37.54 ! 85.73 ! 19.68 ! 50.04 ! 105.38 ! 14.30 ! 37.52 ! 85.72 !
! 6 ! 14.30 ! 37.52 ! 85.72 ! 19.66 ! 50.02 ! 105.37 ! 14.29 ! 37.51 ! 85.72 !
! 7 ! 14.29 ! 37.51 ! 85.72 ! 19.65 ! 50.01 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.72 !
! 8 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.72 ! 19.65 ! 50.00 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.72 !
! 9 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.72 ! 19.65 ! 50.00 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 !
! 10 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 ! 19.64 ! 50.00 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 !
! 11 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 ! 19.64 ! 50.00 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 !
! 12 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 ! 19.64 ! 50.00 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 !
! 13 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 ! 19.64 ! 50.00 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 !
! 14 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 ! 19.64 ! 50.00 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 !
! 15 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 ! 19.64 ! 50.00 ! 105.36 ! 14.29 ! 37.50 ! 85.71 !
=====
    
```

Dari hasil diatas harga potensial setiap titik bujur sangkar adalah  $V_1 = V_7 = 14,29 V$ ,  $V_2 = V_8 = 37,50 V$ ,  $V_3 = V_9 = 85,71 V$ ,  $V_4 = 19,64 V$ ,  $V_5 = 50 V$ ,  $V_6 = 105,36 V$ , pada iterasi ke 15.

5. KESIMPULAN

Dari pembahasan dalam paper ini, maka dapat disimpulkan bahwa hasil perhitungan potensial pada titik-titik penampang konduktor berbentuk bujur sangkar antara persamaan Laplace dan secara numerik hasilnya tidak jauh berbeda. Hanya saja dengan persamaan Laplace untuk satu titik adalah satu kali perhitungan atau tidak pakai iterasi, sedangkan secara numerik untuk mencapai konvergensi pada iterasi ke 15.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Bo Thide., *Electromagnetic Field Theory*, Upsilon Books, Swedia, 2004
- [2]. Cekdin, Cekmas., *Teori dan Contoh Soal Teknik Elektro Menggunakan Bahasa Pemrograman MATLAB*, Penerbit ANDI, Yogyakarta, 200
- [3]. Hayt, William B., *Elektromagnetika Teknik* Jilid 1 & 2, Penerbit Erlangga, 1982.
- [4]. Ida, Nathan., *Ele*

Kraus, Jo

rayana